Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

20 de febrero de 2004.
Matemáticas II (MA–1112)

2^{do} Parcial. (35 %)
TIPO A

1. (5 puntos) Halle la ecuación de la recta tangente en el punto $\left(\frac{\pi}{6},1\right)$ a la curva de ecuación, $y=(1+\cos(3x))^x$.

Solución: Tomando logaritmos a ambos lados obtenemos: $\ln(y)=x\ln(1+\cos(3x))$.

Derivando ambos lados $\quad \dfrac{y'}{y}=x\dfrac{-3\,\mathrm{sen}(3x)}{1+\cos(3x)}+\ln(1+\cos(3x)) \quad\Rightarrow\quad y'=y\left(x\dfrac{-3\,\mathrm{sen}(3x)}{1+\cos(3x)}+\ln(1+\cos(3x))\right)$

Evaluamos en $x=\frac{\pi}{6}$, $y=1$.

$$y'=1\left(\frac{\pi}{6}\,\frac{-3\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})}{1+\cos(\frac{\pi}{2})}+\ln(1+\cos(\frac{\pi}{2})\right)=\frac{\pi}{6}\,\frac{-3}{1}+\ln(1)=-\frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y-1=-\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \qquad \text{o} \qquad 12y+6\pi x=\pi^2+12.$$

---

2. (25 puntos) Halle las siguientes integrales:

Solución:

a) Integramos por partes haciendo

$u=5x, \qquad dv=\mathrm{sen}(x)\cos(x)dx$

$du=5dx, \qquad v=\dfrac{\mathrm{sen}^2(x)}{2}.$

$$\begin{aligned}\int 5x\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)\,dx &= 5x\frac{\mathrm{sen}^2(x)}{2}-\int 5\frac{\mathrm{sen}^2(x)}{2}\,dx\\ &= \frac{5x\,\mathrm{sen}^2(x)}{2}-\frac{5}{2}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}\right)dx\\ &= \frac{5x\,\mathrm{sen}^2(x)}{2}-\frac{5}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{\mathrm{sen}(2x)}{4}\right)+C\\ &= \boxed{\frac{5x\,\mathrm{sen}^2(x)}{2}-\frac{5x}{4}+\frac{5\,\mathrm{sen}(2x)}{8}+C}\end{aligned}$$

a) También se puede hacer primero $\displaystyle\int 5x\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)\,dx=\int 5x\frac{\mathrm{sen}(2x)}{2}\,dx.$

Integramos por partes haciendo

$u=5x, \qquad dv=\dfrac{\mathrm{sen}(2x)}{2}dx$

$du=5dx, \qquad v=\dfrac{-\cos(2x)}{4}.$

$$\begin{aligned}\int 5x\frac{\mathrm{sen}(2x)}{2}\,dx &= 5x\frac{-\cos(2x)}{4}-\int 5\frac{-\cos(2x)}{4}\,dx\\ &= -\frac{5x\cos(2x)}{4}+\frac{5}{4}\left(\frac{\mathrm{sen}(2x)}{2}\right)+C\\ &= \boxed{-\frac{5x\cos(2x)}{4}+\frac{5\,\mathrm{sen}(2x)}{8}+C}\end{aligned}$$

Aunque estos dos resultados parecen diferentes, la identidad $\mathrm{sen}^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}$, nos permite obtener uno a partir del otro.

---

b) Completando cuadrados en el denominador obtenemos $x^2+4x+13=(x+2)^2+9$

Hacemos el cambio de variables:
$u=x+2, \qquad du=dx.$

y el cambio de variables:
$z=\dfrac{u}{3}, \qquad dz=\dfrac{1}{3}du.$

en la segunda integral.

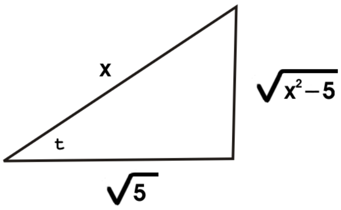
$$\begin{aligned}\int\frac{2x+5}{x^2+4x+13}\,dx &= \int\frac{2(u-2)+5}{u^2+9}\,du=\int\frac{2u+1}{u^2+9}\,du\\ &= \int\frac{2u}{u^2+9}\,du+\int\frac{1}{u^2+9}\,du\\ &= \ln(u^2+9)+\int\frac{1}{9\left(\left(\frac{u}{3}\right)^2+1\right)}\,du\\ &= \ln(x^2+4x+13)+\frac{1}{9}\int\frac{3}{z^2+1}\,dz\\ &= \ln(x^2+4x+13)+\frac{1}{3}\arctan(z)+C\\ &= \boxed{\ln(x^2+4x+13)+\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+2}{3}\right)+C}\end{aligned}$$

c) Hacemos el cambio de variables
$x = \sqrt{5}\sec(t)$

de donde obtenemos:

$x^2 - 5 = 5\sec^2(t) - 5 = 5\tan^2(t)$.

$dx = \sqrt{5}\sec(t)\tan(t)dt$.



$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{5}\tan(t)}{\sqrt{5}\sec(t)}\sqrt{5}\sec(t)\tan(t)dt \\
&= \sqrt{5}\int \tan^2(t)\;dt = \sqrt{5}\int (\sec^2(t)-1)\;dt \\
&= \sqrt{5}\tan(t) - \sqrt{5}\;t + C \\
&= \sqrt{5}\;\frac{\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}\;\mathrm{arcsec}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C \\
&= \boxed{\sqrt{x^2-5} - \sqrt{5}\;\mathrm{arcsec}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C}
\end{aligned}$$

c) También podemos hacer
el cambio de variables

$u = \sqrt{x^2-5}$
$x = \sqrt{u^2+5}$

de donde obtenemos:

$dx = \dfrac{u\;du}{\sqrt{u^2+5}}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x}\,dx &= \int \frac{u}{\sqrt{u^2+5}}\frac{u\;du}{\sqrt{u^2+5}} \\
&= \int \frac{u^2\;du}{u^2+5} = \int \frac{(u^2+5-5)\;du}{u^2+5} \\
&= \int 1\;du + \int \frac{-5\;du}{u^2+5} \\
&= u - 5\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C \\
&= \boxed{\sqrt{x^2-5} - \sqrt{5}\;\arctan\left(\sqrt{\frac{x^2-5}{5}}\right) + C}
\end{aligned}$$

del triángulo se observa que $t = \mathrm{arcsec}\left(\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{x^2-5}{5}}\right)$.

---

d) Integramos por partes haciendo

$u = \ln(3x)$, $\qquad dv = \sqrt[5]{x}\;dx$

$du = \dfrac{1}{x}\;dx$, $\qquad v = \dfrac{5}{6}x^{6/5}$.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[5]{x}\ln(3x)\;dx &= \ln(3x)\frac{5}{6}x^{6/5} - \int \frac{5}{6}x^{6/5}\frac{1}{x}\;dx \\
&= \frac{5\ln(3x)x^{6/5}}{6} - \frac{5}{6}\int x^{1/5}\;dx \\
&= \frac{5\ln(3x)x^{6/5}}{6} - \frac{5}{6}\frac{5}{6}x^{6/5} + C \\
\boxed{\frac{5\ln(3x)x^{6/5}}{6} - \frac{25x^{6/5}}{36} + C} &= \boxed{\frac{5}{36}x^{6/5}\left(6\ln(3x)-5\right) + C}
\end{aligned}$$

---

e) Primero escribimos la integral de la siguiente manera:

$$\int \mathrm{sen}^3(x)\sqrt{7\cos^3(x)}\;dx = \sqrt{7}\int \mathrm{sen}^2(x)\cos^{3/2}(x)\,\mathrm{sen}(x)\;dx = \sqrt{7}\int (1-\cos^2(x))\cos^{3/2}(x)\,\mathrm{sen}(x)\;dx$$

Hacemos el cambio
de variables:

$u = \cos(x)$

$du = -\,\mathrm{sen}(x)\;dx$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{7}\int (1-\cos^2(x))\cos^{3/2}(x)\,\mathrm{sen}(x)\;dx &= \sqrt{7}\int (1-u^2)u^{3/2}(-du) \\
&= \sqrt{7}\int (u^{7/2}-u^{3/2})\;du \\
&= \sqrt{7}\left(\frac{2}{9}u^{9/2} - \frac{2}{5}u^{5/2}\right) + C \\
&= \boxed{\frac{2\sqrt{7}\cos^{9/2}(x)}{9} - \frac{2\sqrt{7}\cos^{5/2}(x)}{5} + C}
\end{aligned}$$

---

3. (5 puntos) Demuestre que:

a) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. $\qquad$ *b*) $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.

Demostrado en clase. (Revise sus apuntes)